Teoria de Ondas Guiadas
Prof. Dr. Ben-Hur Viana Borges

Reflexão e transmissão em uma interface dielétrica:

O estudo das propriedades de reflexão e transmissão em uma interface dielétrica é de extrema importância para se entender o mecanismo de guiamento de luz em guias de ondas ópticos integrados ou em fibra. O que se pretende com esta seção é mostrar ao aluno com proceder com a derivação dos coeficientes de reflexão e transmissão tendo como ponto de partida as equações de Maxwell. Vale lembrar que a luz tem um comportamento vetorial, sendo assim, toda a análise desenvolvida nesta seção requer um conhecimento prévio de álgebra vetorial.

Uma onda incidente em uma interface dielétrica pode ser decomposta em termos de ondas TE (campo elétrico transversal) e TM (campo magnético transversal). Isto é válido para ondas incidentes com qualquer polarização. A onda TE é linearmente polarizada com o vetor campo elétrico perpendicular ao plano de incidência, portanto, é também denominada onda perpendicularmente polarizada, ou ainda, horizontalmente polarizada. Uma onda TM, por sua vez, é linearmente polarizada com o vetor elétrico paralelo ao plano de incidência e é, portanto, denominada onda paralelamente polarizada, ou ainda, verticalmente polarizada.

Considere uma onda com polarização TE incidindo em uma interface dielétrica como mostra a Fig. 1. O ponto de partida, como dito anteriormente, são as equações de Maxwell, ou seja

$$\nabla \times \overline{E} = -j\omega\mu\overline{H} \tag{1}$$

$$\nabla \times \overline{H} = j\omega\varepsilon\overline{E} \tag{2}$$

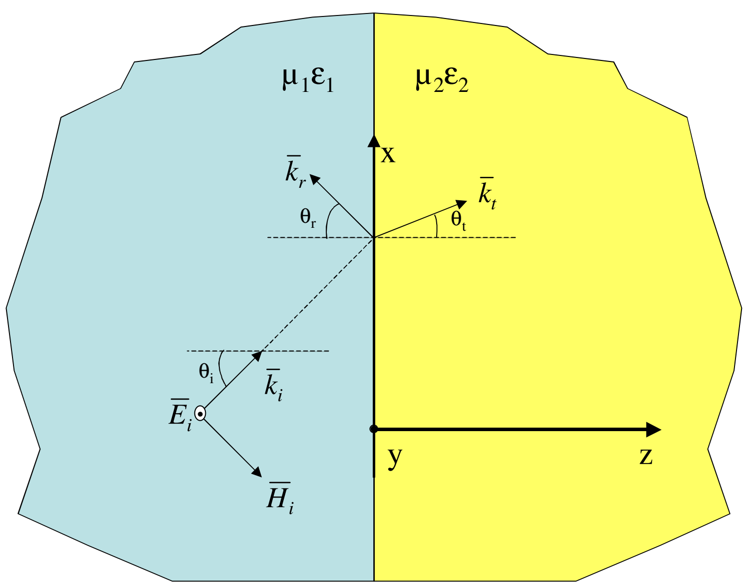

Fig.1: Onda incidente em uma interface dielétrica. Os subscritos *i, r, t* correspondem às ondas incidente, refletida e transmitida, respectivamente. O plano de incidência é o *xz*.

De forma geral, os vetores de onda incidente, refletido ou transmitido podem ser escritos da seguinte forma:

$$\bar{k} = k_x\hat{x} + k_y\hat{y} + k_z\hat{z}$$

O mesmo vale para o raio vetor, o qual pode ser escrito como

$$\bar{r} = x\hat{x} + \hat{y}y + z\hat{z}$$

Portanto, o campo elétrico é definido como

$$E = \bar{E}(\bar{r})e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}}$$

Expandindo, tem-se

$$\bar{E} = \left(E_x\hat{x} + E_y\hat{y} + E_z\hat{z}\right)e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} \tag{3}$$

Como se sabe, as equações de Maxwell são o ponto de partida para a solução de qualquer problema eletromagnético. Pelo seu caráter geral, torna-se interessante a obtenção de certas relações envolvendo os campos elétricos e magnéticos que poderão ser utilizadas em futuras derivações.

Da álgebra vetorial, tem-se que $\nabla \times \bar{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$. Assim, a expansão de (1) produz,

$$\begin{gathered} \hat{x}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) - \hat{y}\left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) = \\ \hat{x}\left[-jk_yE_z + jk_zE_y\right] - \hat{y}\left[-jk_xE_z + jk_zE_x\right] + \hat{z}\left[-jk_xE_y + jk_yE_x\right] \end{gathered} \tag{4}$$

Como se pode ver pelo argumento da exponencial na equação (3), as derivadas parciais no lado esquerdo de (4) irão ocasionar o surgimento de (j) multiplicando todo o lado esquerdo. Assim, colocando-se (j) em evidência em ambos os lados tem-se:

$$(-j)\left\{\hat{x}\left[k_yE_z - k_zE_y\right] - \hat{y}\left[-k_xE_z + k_zE_x\right] + \hat{z}\left[k_xE_y - k_yE_x\right]\right\} = (-j)\varpi\mu H \tag{5}$$

Se você observa os termos entre chaves em (5) irá observar que a seguinte simplificação pode ser feita:

$$\hat{z}k_xE_y - \hat{y}k_xE_z - \hat{z}k_yE_x + \hat{x}k_yE_z + \hat{y}k_zE_x - \hat{x}k_zE_y = \left(k_x\hat{x} + k_y\hat{y} + k_z\hat{z}\right)\times\left(E_x\hat{x} + E_y\hat{y} + E_z\hat{z}\right) = \hat{k}\times\bar{E}$$

Assim, rearranjando (5), tem-se uma expressão extremamente útil relacionando o campo elétrico com o campo magnético, ou seja,

$$\overline{H} = \frac{\overline{k} \times \overline{E}}{\omega\mu} \tag{6}$$

A derivação da equação para campo elétrico é feita de maneira similar, resultando em

$$\overline{E} = -\frac{\overline{k} \times \overline{H}}{\omega\varepsilon} \tag{7}$$

As seguintes relações podem ser igualmente provadas:

$$\overline{k} \cdot \overline{H} = 0 \tag{8}$$

$$\overline{k} \cdot \overline{E} = 0 \tag{9}$$

De posse das relações (6) e (7), será dado prosseguimento à derivação dos coeficientes de reflexão e transmissão em uma interface dielétrica.

a) Para modos TE:
No caso de modos TE, apenas uma componente de campo elétrico (transversal) está presente, ou seja, E_y. O vetor de onda incidente, $\overline{k}_i$, é dado por (lembre que o plano de incidência é o xz):

$$\overline{k}_i = k_x \hat{a}_x + k_z \hat{a}_z$$

onde

$$k_x = k_1 \, sen\,\theta_i \qquad k_z = k_1 \cos\theta_i$$

Logo, o campo elétrico incidente pode ser escrito da seguinte forma:

$$\overline{E}_i = E_{0i} \, e^{-j\overline{k}\cdot\overline{r}} \, \hat{a}_y$$

onde E_{oi} é a amplitude do campo elétrico (V/m). Expandindo, tem-se

$$\overline{E}^i = E^i_{0y} \, \hat{a}_y \, e^{-jk_1(x\,sen\,\theta_i + z\cos\theta_i)}$$

De (6), tem-se que

$$\overline{H}^i = \frac{\overline{k}^i \times \overline{E}^i}{\omega\mu_1} = \frac{k_1}{\omega\mu_1}\left(sen\,\theta_i \hat{a}_x + \cos\theta_i \hat{a}_z\right) \times E^i_{0y} \hat{a}_y e^{-jk_1(x\,sen\,\theta_i + z\cos\theta_i)}$$

Sabendo que a admitância da onda no meio 1 é dada por $Y_1 = \dfrac{k_1}{\omega\mu_1}$, resulta

$$\overline{H}^i = Y_1\left(sen\,\theta_i \hat{a}_z - \cos\theta_i \hat{a}_x\right) E_{0y}^i e^{-jk_1\left(xsen\,\theta_i + z\cos\theta_i\right)} \tag{10}$$

Para a onda refletida, o vetor de onda é dado por,

$$\overline{k}_r = k_1 sen\,\theta_r \hat{a}_x - k_1 \cos\theta_r \hat{a}_z$$

O campo elétrico refletido, é portanto, $\overline{E}^r = E_{0y}^r e^{-j\overline{k}_r \cdot \overline{r}} \hat{a}_y$, o qual depois de expandido torna-se

$$\overline{E}^r = E_{0y}^r e^{-jk_1\left(xsen\,\theta_r - z\cos\theta_r\right)} \hat{a}_y \tag{11}$$

onde E_{0y}^r é a amplitude do campo refletido. Substituindo (11) em (6), tem-se

$$\overline{H}_r = \frac{\overline{k}^r \times E^r}{\omega\mu} = \frac{k_1}{\omega\mu}\left(sen\,\theta_r \hat{a}_x - \cos\theta_r \hat{a}_z\right) \times E_{0y}^r \hat{a}_y e^{-jk_1\left(xsen\,\theta_r - z\cos\theta_r\right)}$$

ou

$$\overline{H}_r = Y_1\left(sen\theta_r \hat{a}_z + \cos\theta_r \hat{a}_x\right) E_{0y}^r e^{-jk_1\left(xsen\theta_r + z\cos\theta_r\right)} \tag{12}$$

Para a onda transmitida, o vetor de onda é dado por

$$\overline{k}_t = k_2\left(sen\,\theta_t \hat{a}_x + \cos\theta_t \hat{a}_z\right)$$

O campo elétrico transmitido, por sua vez, é dado por

$$\overline{E}_t = E_{0y}^t \hat{a}_y e^{-jk_2\left(xsen\theta_t + z\cos\theta_t\right)} \tag{13}$$

onde E_{0y}^t é a amplitude da onda transmitida para o meio 2. Substituindo (13) em (6), tem-se

$$\overline{H}_t = \frac{k_t \times E_t}{\omega\mu} = Y_2\left(sen\theta_t \hat{a}_z - \cos\theta_t \hat{a}_x\right) e^{-jk_2\left(xsen\theta_t + z\cos\theta_t\right)} \tag{14}$$

Em se tratando de solução de problemas que envolvem interfaces dielétricas é de importância crucial compreender o que acontece com as componentes de campo na junção entre dois meios. Para isso, temos o que se chama “condições de contorno”, ou se preferir, "condições de fronteira". Em uma interface dielétrica as componentes de campo tangenciais devem ser contínuas. O mesmo é válido para as componentes normais. As condições de contorno em uma interface são governadas pelas equações abaixo (a derivação destas equações pode ser encontrada em qualquer livro de eletromagnetismo, por ex., o do William H. Hayt, Jr.)

$$\hat{n}\times\left(\overline{E}_1-\overline{E}_2\right)=0 \tag{15}$$

$$\hat{n}\times\left(\overline{H}_1-\overline{H}_2\right)=\overline{J} \tag{16}$$

$$\hat{n}\cdot\left(\overline{D}_1-\overline{D}_2\right)=\rho_s \tag{17}$$

$$\hat{n}\cdot\left(\overline{B}_1-\overline{B}_2\right)=0 \tag{18}$$

onde $\hat{n}$ no nosso caso é o vetor unitário na direção de propagação, z (do meio 1 para o meio 2). Como iremos tratar aqui de meios dielétricos sem cargas, a densidade de corrente $\overline{J}$ a densidade de carga ρ_s são igualmente zero, ou seja, $\overline{J}=\rho_s=0$. As equações (15) e (16) estabelecem que as componentes de campo elétrico e magnético, respectivamente, tangenciais à interface são contínuas. As equações (17) e (18), por sua vez, estabelecem que as componentes normais de campo elétrico e magnético também devem ser contínuas através da interface. Assim, utilizando (15)

usando (15)

$$\hat{a}_z\times\left[E_{0y}^i e^{-jk_1 x sen\theta_i}+E_{0y}^r e^{-jk_1 x sen\theta_r}-E_{0y}^t e^{-jk_2 x sen\theta_t}\right]\hat{a}_y=0$$

definindo

$$R=\frac{E_{0y}^r}{E_{0y}^i} \tag{19}$$

e

$$T=\frac{E_{0y}^t}{E_{0y}^i} \tag{20}$$

tem-se

$$E_{0y}^i\left[e^{-jk_1 x sen\theta_i}+\mathrm{Re}^{-jk_1 sen\theta_r}-Te^{-jk_2 x sen\theta_t}\right]\hat{a}_x=0$$

A equação acima só apresenta solução se a seguinte igualdade entre os argumentos das exponenciais for verdadeira

$k_1 sen\,\theta_i=k_1 sen\,\theta_r=k_2 sen\,\theta_t$ (isso é nada mais nada menos do que a Lei de Snell)

Sendo assim, a seguinte relação é obtida

$$T = 1 + R \tag{21}$$

Agora, utilizando (16), sabendo que $\bar{J} = 0$, tem-se

$$\hat{a}_z \times \left[Y_1 \left(sen\,\theta_i \hat{a}_z - \cos\theta_i \hat{a}_x \right) E_{0y}^i e^{-jk_1 x sen\,\theta_i} + Y_1 \left(sen\,\theta_r \hat{a}_z + \cos\theta_r \hat{a}_x \right) E_{0y}^r e^{-jk_1 x sen\,\theta_r} \right.$$
$$\left. - Y_2 \left(sen\,\theta_t \hat{a}_z - \cos\theta_t \hat{a}_x \right) E_{0y}^t e^{-jk_2 x sen\,\theta_t} \right] = 0 \tag{22}$$

Rearranjando, tem-se

$$\hat{a}_z \times \left[-Y_1 \cos\theta_i \hat{a}_x E_{0y}^i e^{-jk_1 x sen\,\theta_i} + Y_1 \cos\theta_r \hat{a}_x E_{0y}^r e^{-jk_1 x sen\,\theta_r} + Y_2 \cos\theta_t \hat{a}_x E_{0y}^t e^{-jk_2 x sen\,\theta_t} \right] = 0$$

Substituindo (19) e (20) em (22), tem-se

$$E_{0y}^i \left[-Y_1 \cos\theta_i + Y_1 \cos\theta_r R \right] \hat{a}_y = -E_{0y}^i Y_2 \cos\theta_t \hat{a}_y T$$

Agora, simplificando

$$Y_1 (1 - R) \cos\theta_i = Y_2 \cos\theta_t T$$

Com a ajuda de (21), tem-se

$$Y_1 (1 - R) \cos\theta_i = Y_2 \cos\theta_t (1 + R)$$

Abrindo a equação acima,

$$Y_1 \cos\theta_i - Y_1 R \cos\theta_i = Y_2 \cos\theta_t + Y_2 R \cos\theta_t$$

Agrupando os termos em R do lado esquerdo,

$$R(-Y_1 \cos\theta_i - Y_2 \cos\theta_t) = Y_2 \cos\theta_t - Y_1 \cos\theta_i$$

Assim, o coeficiente de reflexão para modos TE para qualquer ângulo de incidência é dado por

$$R = \frac{Y_1 \cos\theta_i - Y_2 \cos\theta_t}{Y_1 \cos\theta_i + Y_2 \cos\theta_t} \tag{23}$$

O coeficiente de transmissão é obtido substituindo (23) em (21), ou seja,

$$T = \frac{2 Y_1 \cos\theta_i}{Y_1 \cos\theta_i + Y_2 \cos\theta_t} \tag{24}$$

onde $Y_1 = \dfrac{k_1}{\omega\mu_1} \qquad Y_2 = \dfrac{k_2}{\omega\mu_2}$

b) Para modos TM:

A derivação é feita de maneira similar, resultando em

$$R_{TM} = \frac{H_{0y}^r}{H_{0y}^i} = \frac{Z_1 \cos\theta_i - Z_2 \cos\theta_t}{Z_1 \cos\theta_i + Z_2 \cos\theta_t}$$

$$Z_1 = \frac{k_1}{\omega\varepsilon_1} \quad \text{e} \quad Z_2 = \frac{k_2}{\omega\varepsilon_2}$$

$$T_{TM} = \frac{H_{0y}^t}{H_{0y}^i} = \frac{2Z_1 \cos\theta_i}{Z_1 \cos\theta_i + Z_2 \cos\theta_i}$$

Obs.: o ângulo para o qual o coeficiente de reflexão R = O é conhecido como ângulo de Brewster.